Université Paul Sabatier 2018/2019

L2 Maths “Compléments de théorie des ensembles”

TD n$^{\text{o}}$1: Ensembles

Exercice 1 Donnez des propriétés qui définissent ces ensembles: $\{\emptyset\}$, $\{4\}$, $\{1,2,3,4,5\}$, $\{0,2,4,6,8,10\}$, $\{0,2,4,6,8,10...\}$.

Exercice 2 Quel ensemble E vérifie : $\forall x, x \notin E$?

Exercice 3 Montrer que $\{a,b\} = \{b,a\}$.

Exercice 4 Donner une C.N.S. sur a, b et c pour que $\{a,b\} = \{c\}$.

Exercice 5 Soient A et B deux propriétés. On suppose: $\forall x$, $A(x) \Rightarrow B(x)$. Montrer que, si B est collectivisante, alors A l’est. (Appliquer l’axiome de séparation.)

Exercice 6 Soient E et F des ensembles. Montrer les Ãl’quivalences:

$$E \subset F \Leftrightarrow E = E \cap F$$

et

$$E \subset F \Leftrightarrow F = E \cup F.$$

Exercice 7 Soient E et F des ensembles. À quelle condition a-t-on $E \cup F = E \cap F$?

Exercice 8 Soient E, F et G des ensembles tels que $F \subset E$ et $G \subset E$. Montrer que

$$C_E(C_E F) = F,$$

$$C_E(F \cup G) = (C_E F) \cap (C_E G),$$
$$C_E(F \cap G) = (C_E F) \cup (C_E G).$$

Exercice 9 Soient A, B et C des ensembles. Montrer que

$$(A \cup B \subset A \cup C \text{ et } A \cap B \subset A \cap C) \Rightarrow B \subset C.$$

.

Exercice 10 Soient $A = \{0,1,2\}$, $B = \{4,5,6\}$, et $C = \{1,4,5\}$ des ensembles. Décrire explicitement $A \times B$ et $A \times C$.

Exercice 11 À quelle condition a-t-on respectivement $E \times F = \emptyset$? $E \times F = \{a\}$? $E \times F = \{a,b\}$?

Exercice 12 Soient A, B et E des ensembles.
1) Montrer que $A \subset B \Leftrightarrow \mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(B)$.
2) À quelle condition a-t-on respectivement $\mathcal{P}(E) = \emptyset$? $\mathcal{P}(E) = \{a\}$? $\mathcal{P}(E) = \{a,b\}$? $\mathcal{P}(E) = \mathcal{P}(F)$?

Exercice 13 Soient E et F des ensembles.
1) Comparer $\mathcal{P}(E \cap F)$ et $\mathcal{P}(E) \cap \mathcal{P}(F)$; $\mathcal{P}(E \cup F)$ et $\mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F)$; $\mathcal{P}(E \times F)$ et $\mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(F)$.
2) Comparer $\mathcal{P}(E \cup F)$ et $\mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(F)$, en particulier quand E et F sont disjoints.

Deuxième série (exercices facultatifs)

Exercice 14 1) Démontrer que la propriété $A(x) := (x \notin x)$ n'est pas collectivisante. (Procéder par l'absurde.)
2) Est $B(x) := (x = x)$ collectivisante ? (Utiliser l'exercice 5 et l'axiome de séparation.)
3) Existe-t-il un ensemble de tous les ensembles ?

Exercice 15 1) Démontrer que $\{\{a\},\{a,b\}\} = \{\{a'\},\{a',b'\}\}$ si, et seulement si, $a = a'$ et $b = b'$. (Distinguer deux cas, selon que $b = a$ ou $b \neq a$.)
2) Cela peut donc servir à construire les couples en *définissant* $(a,b) := \{\{a\},\{a,b\}\}$. A-t-on alors $(a,(b,c)) = ((a,b),c)$?

Exercice 16 1) On dit qu'un ensemble E est *transitif* si tout élément de E en est un sous-ensemble: $\forall x\ ,\ x \in E \Rightarrow x \subset E$. Prouver que si E est transitif, alors $F := \mathrm{succ}(E)$ l'est également, et que si de plus $E \notin E$, alors $F \notin F$ et l'inclusion $E \subset F$ est stricte.
2) On définit par récurrence $E_0 := \emptyset$, puis, pour tout entier k, $E_{k+1} := \mathrm{succ}(E_k)$. Démontrer que les E_k sont deux à deux distincts.

Exercice 17 Étude des propriétés de la différence symétrique:

$$F \oplus G := (F \setminus G) \cup (G \setminus F) = (F \cup G) \setminus (F \cap G).$$

On vérifiera d'abord la deuxième égalité. Puis on discutera l'associativité, la commutativité, l'existence de neutres et d'opposés pour cette "loi de composition interne" (ou opération) sur $\mathcal{P}(E)$.

Exercice 18 On pose $E_0 := \emptyset$ et $E_{k+1} := \mathcal{P}(E_k)$. Montrer que les ensembles $E_0, E_1, \ldots$ sont deux à deux distincts. L'ensemble $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ est-il égal à l'un des ensembles E_k ?

Exercice 19 1) Dans certaines variantes de la théorie des ensembles, on introduit l'*axiome de fondation*: $\forall x \neq \emptyset\ ,\ \exists y \in x\ :\ y \cap x = \emptyset$. Démontrer que cet axiome équivaut à l'affirmation suivante: il n'existe pas de suite d'ensembles $x_0, x_1, \ldots$ telle que $\forall i \in \mathbf{N}\ ,\ x_{i+1} \in x_i$. (Pour l'implication directe, procéder par l'absurde et considérer $x = \{x_i \mid i \in \mathbf{N}\}$.)
2) Démontrer que l'axiome de fondation entraine qu'il n'existe aucun ensemble qui soit élément de lui-même et donc qu'il n'existe pas d'ensemble de tous les ensembles.
3) On pose $s(x) = x \cup \{x\}$ ("successeur" de x). Sous la même hypothèse, montrer que $x, s(x), s\big(s(x)\big), \ldots$ sont deux à deux distincts.
4) La relation $(\forall y \in x\ ,\ y \in y)$ est-elle collectivisante ? Et la relation $(\forall y \in x\ ,\ y \notin y)$?
